Subject: هفته سوم ۳ - تک جلسه

Year. ۹۷ Month. ۱۱ Date. ۳۰ ( )

سیگنال‌ها و سیستم‌ها — جناب آقای دکتر رسولی

مرجع درس: کتاب سیگنال‌ها و سیستم‌ها ترجمه‌ی محمود دیانی

سیاست نمره‌دهی:

۲۰ نمره

+۲ حضور در کلاس (۱ روز غیبت)

تمرین ۰/۷۵ + و ۰/۵ -

+۳ میانترم (۱ سؤال)

۹۷/۱۲/۰۷ - هفته ۴ - جلسه ۲ - جلسه اول

* مقدمه

در این درس با بررسی ویژگی‌های یک سیگنال؛ سیگنال‌های زمان پیوسته و زمان گسسته را مطرح می‌کنیم. سپس با نحوه‌ی تبدیل این سیگنال‌ها به یکدیگر و برخی کاربرد این تبدیلات در کامپیوتر آشنا می‌شویم. در ادامه با مد نظر گرفتن سیگنال‌های زمان گسسته، شروع به تحلیل عملکرد سیستم‌هایی که با این سیگنال‌ها سروکار دارند می‌کنیم.

به منظور تحلیل بهتر سیستم‌ها از طراحی بلوک دیاگرام این سیستم‌ها با استفاده از المان‌های استانداردی همچون ضرب کننده و تأخیردهنده استفاده می‌کنیم.

۱ دامنه ۲ فاز ۳ فرکانس سه ویژگی هستند که سیگنال‌ها را از هم متمایز می‌کنند.

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　　(　)

- سیگنال های زمان پیوسته

اکثر سیگنال های محیط پیرامون از این نوع هستند. در این نوع سیگنال ها در هر لحظه از واحد زمان

سیگنال دارای بزرگی خاصی می باشد:

- سیگنال های زمان گسسته

برخلاف سیگنال های زمان پیوسته، در این نوع سیگنال ها، سیگنال ها تنها در اندیس های معینی دارای بزرگی

خاص می باشد:

- تبدیل سیگنال زمان پیوسته به زمان گسسته: به منظور تبدیل سیگنال زمان پیوسته به زمان گسسته از نمونه برداری

که دارای نرخ نمونه برداری خاص است استفاده می شود، به این صورت که بر اساس آن نرخ نمونه برداری از

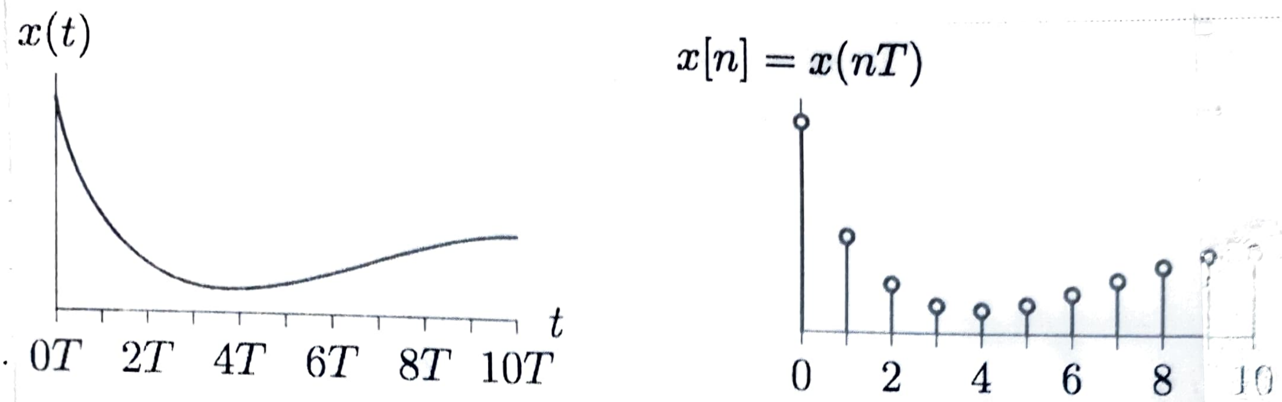
سیگنال زمان پیوسته در واحد زمان نمونه برداری انجام می گیرد و از سیگنال هر یک از نمونه ها ذخیره می گردد.

به عنوان مثال در صورت نمونه برداری ۱۰ نمونه در واحد زمان از سیگنال زمان پیوسته [illegible] کند،

سیگنال زمان گسسته به شکل مقابل احصاء می شود

«قابل استفاده برای فایل های MP3»

Subject:
Year. Month. Date. ( )



T = sampling interval

- تبدیل سیگنال زمان گسسته به زمان پیوسته: از آن جائیکه سیگنال زمان پیوسته به منظور ذخیره‌سازی در کامپیوتر به سیگنال زمان گسسته تبدیل شده است مطمئناً پس از انجام برخی پردازش‌ها مجدداً باید جهت استفاده در محیط بیرونی به زمان پیوسته تبدیل شود. برای این منظور به طور کلی ۲ الگوریتم رایج مورد استفاده قرار می‌گیرد:

برای تبدیل سیگنال زمان گسسته ← زمان پیوسته

① الگوریتم نگه‌داشتن بدون تغییر (Zero-order Hold)

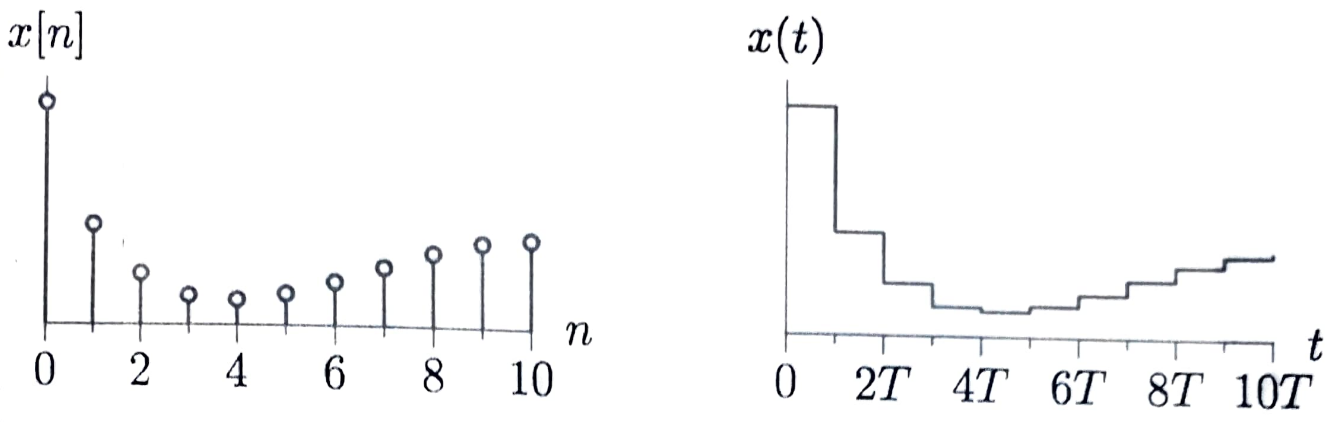
② الگوریتم خطی تکه‌ای (Piecewise Linear)

Zero-Order Hold: در این الگوریتم مقدار جزئی سیگنال در اندیس فعلی تا رسیدن به اندیس دیگر بدون تغییر حفظ می‌گردد و بلافاصله پس از رسیدن به اندیس بعدی، جزئی سیگنال به جزئی آن اندیس تغییر می‌یابد. همین عملیات برای اندیس‌های بعدی تا رسیدن به انتهای سیگنال انجام می‌گیرد، همانند تصویر صفحه بعد.

* در CD Player ها از این الگوریتم استفاده می‌شود.

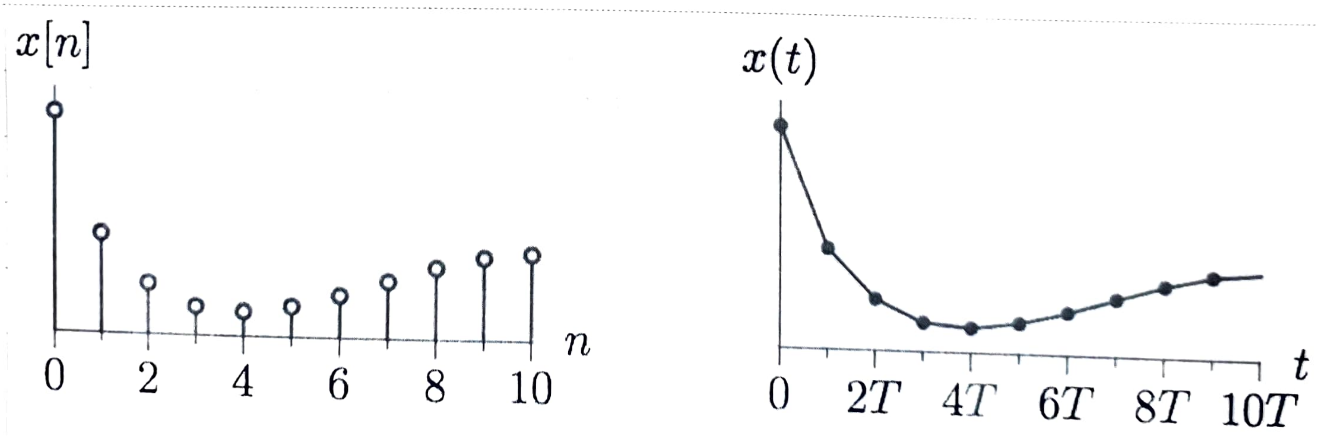
Subject:

Year. Month. Date. ( )



T = sampling interval

Piecewise Linear : در این الگوریتم برای مقدار سیگنال در اندیس فعلی و اندیس بعدی با استفاده از رابطه‌ی خط مرتبه‌ی اول به صورت خط مستقیم به یکدیگر وصل می‌گردد. همین عمل برای اندیس‌ها بعد تا رسیدن به انتهای سیگنال تکرار می‌گردد. به صورت شکل زیر:



T = sampling interval

«این الگوریتم در رندرینگ تصاویر کاربرد دارد.»

Subject: هفته چهارم - ۲ جلسه - جلسه دوم
Year . ۹۷ Month . ۲ Date . ۰۷

* سیستم های زمان گسسته

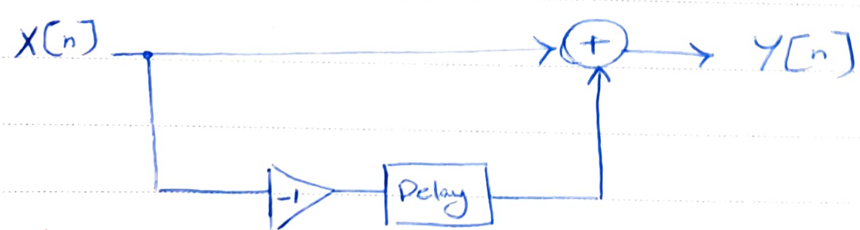
از آن جائیکه سیگنال های زمان گسسته کاربردهای بیشتری در مباحث محاسبات و دیجیتالی دارند لذا این رو در این فصل با تحلیل رفتار سیستم های زمان گسسته آشنا خواهیم شد. عملکرد یک سیستم زمان گسسته را به ۳ شکل می توان تحلیل نمود:

① توصیف اختصاری: در این روش با تشریح عملکرد سیستم به صورت تئوریک، به منظور کاهش تعداد بیت ها جهت ذخیره سازی مقدار اولیه ی سیگنال ذخیره شده و برای اندیس های بعدی تنها میزان تفاوت با مقدار اولیه ذخیره می شود.

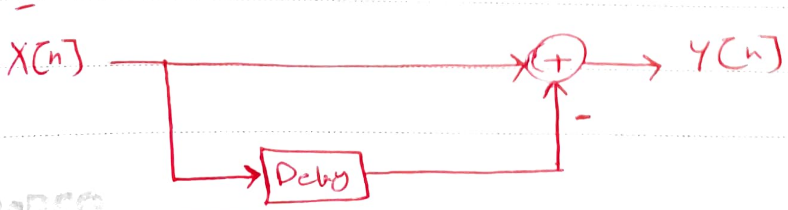
② رابطه ی تفاضلی: به منظور تحلیل ریاضی عملکرد سیستم ها به صورت می توان رفتار خروجی را براساس تغییرات نسبت به ورودی به صورت رابطه ی ریاضی در آورد همانند رابطه ی تفاضلی:

$$Y[n] = X[n] - X[n-1]$$

③ توصیف بلوک دیاگرامی: در این روش با بهره گیری از المان های استانداردی همچون ضرب کننده، جمع کننده و تأخیر دهنده، عملکرد سیستم را مورد بررسی قرار می دهیم. به عنوان مثال رابطه ی تفاضلی فوق را می توان به صورت بلوک دیاگرام معادل طراحی نمود:

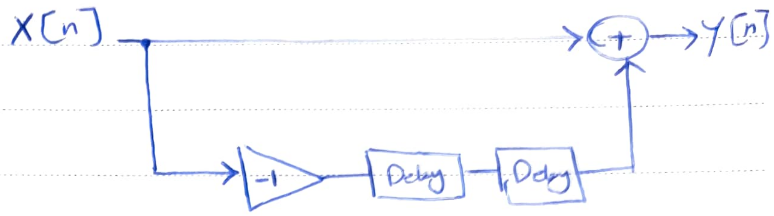


یا



Subject :
Year . Month . Date . ( )

$$Y[n] = X[n] - X[n-2]$$



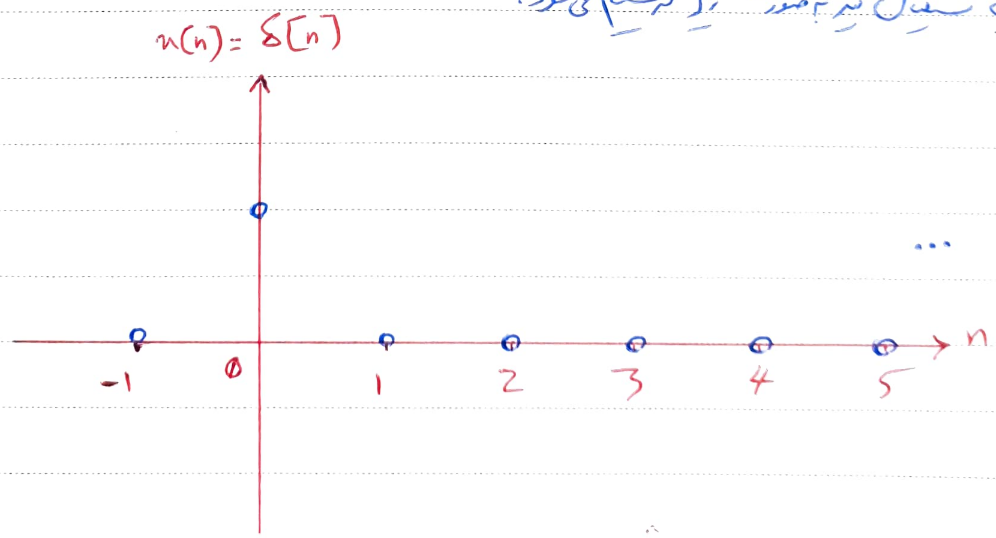
سیگنال نمونه واحد (unit Sample)

به منظور بررسی عملکرد سیستم ها، تحلیل سیگنال خروجی آن ها با یکدیگر، از یک سیگنال استاندارد به نام سیگنال نمونه واحد به عنوان سیگنال ورودی برای همه ی سیستم‌ها استفاده می‌شود.

ویژگی این سیگنال در اندیس 0 برابر 1 بوده و در بقیه اندیس ها برابر 0 می باشد. تابع این سیگنال به صورت زیر قابل نوشتن می باشد:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0; \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases}$$

شکل موج این سیگنال نیز به صورت زیر ترسیم می شود؛



Subject :

Year . Month . Date . ( )

تمرین: اگر رابطه‌ی تفاضلی عملکرد یک سیستم برابر با $y[n]=x[n]-x[n-1]$ باشد با در نظر گرفتن سیگنال ضربه واحد به عنوان سیگنال ورودی کدام یک از عبارات زیر صحیح می‌باشد؟

$x[n]=\delta[n]$

✓ ① $y[2] > y[1]$

$$y[1] = \cancel{x[1]}^{0} - \cancel{x[0]}^{1} = -1$$

$$y[2] = \cancel{x[2]}_{0} - \cancel{x[1]}_{0} = 0$$

✗ ② $y[3] > y[2]$

$$y[3] = x[3] - x[2] = 0$$

✓ ③ $y[2] = 0$

✓ ④ $y[n] - y[n-1] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$

$$= \big[x[n]-x[n-1]\big] - \big[x[n-1]-x[n-2]\big]$$

$$= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

✓ ⑤ $y[119] = 0$

به منظور ساده‌تر نمودن تحلیل ریاضی عملکرد سیستم‌ها از اپراتور R به جای تأخیر استفاده می‌شود به طوری که $Y=RX$

به عبارتی $Y[n]=X[n-1]$ می‌باشد. از این رو می‌توان رابطه‌ی تفاضلی $Y[n]=X[n]-X[n-1]$

را به صورت مقابل بازنویسی کرد: $Y = X - R^1X = (1-R)X$

$Y = X - R^3X$

معادل

$y[n] = x[n] - x[n-3]$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

تمرین: اگر $Y=RX$ باشد کدام یک از عبارت های زیر درست می باشد:

× ① $y[n]=x[n]$ for all n. $y[n]=x[n-1]$

✓ ② $y[n+1]=x[n]$ for all n. $y[n+1]=x[n-1+1]=x[n]$

× ③ $y[n]=x[n+1]$ for all n.

× ④ $y[n-1]=x[n]$ for all n. $y[n-1]=x[n-1-1]=x[n-2]$

۹۷/۱۲/۱۴ - هفته ی ۵ - ۹ جلسه

$\frac{Y_2}{X} \rightarrow$ تغییرات Y_2 نسبت به X

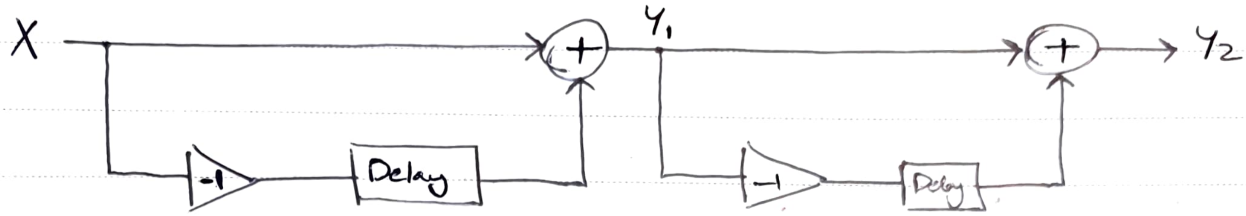
سیستم های آبشاری یا Cascaded Systems

سیستم های آبشاری سیستم هایی هستند که در آن ها چندین زیرسیستم $\boxed{\text{از یک نوع}}$ به صورت سری به یکدیگر متصل می شوند بطوریکه خروجی ۱ زیرسیستم به عنوان ورودی به زیرسیستم بعدی اعمال می شود.

بعنوان مثال برای این سیستم ها، می توان بلوک دیاگرام سیستم صفحه ی قبل را در نظر گرفت که به عکس آن متقابلاً تحلیل شده است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$$Y_1 = X - RX = X(1-R) \quad \mathrm{(I)}$$

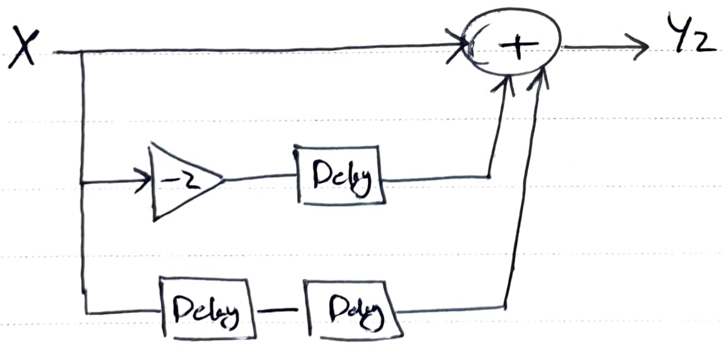
$$Y_2 = Y_1 - RY_1 = Y_1(1-R) \xRightarrow{\mathrm{I}} Y_2 = X(1-R)(1-R) = X(1-R)^2$$

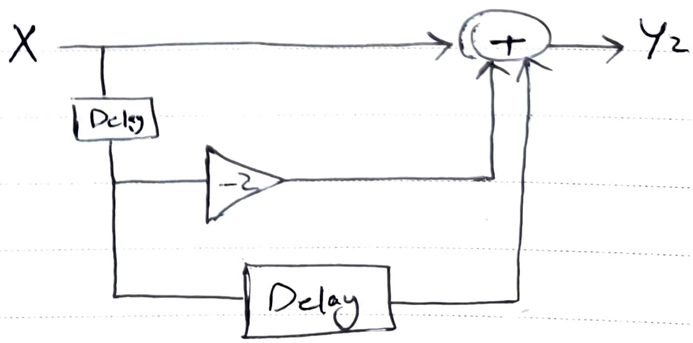
$$= X(1-2R+R^2) \Rightarrow Y_2 = X - 2RX + R^2X$$

$$\Rightarrow Y_2[n] = X[n] - 2X[n-1] + X[n-2]$$

از آن جائیکه بلوک دیاگرام مربوط به عملکرد سیستم منحصر به فرد می باشد بنابراین می توان برای این سیستم نیز

با توجه به روابط عملکردی آن بلوک دیاگرام هایی به شکل زیر در نظر گرفت:

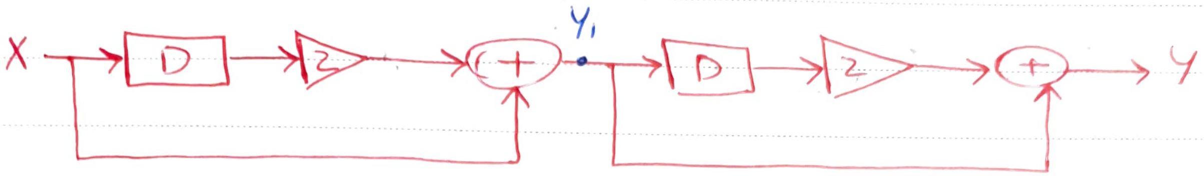




Subject :

Year .   Month .   Date .   ( )

تمرین) کدامیک از سیستم‌های زیر دارای رابطه‌ی عملگری $Y=(4R^2+4R+1)X$ می‌باشد؟



$$Y_1 = X + 2RX \quad \text{I}$$

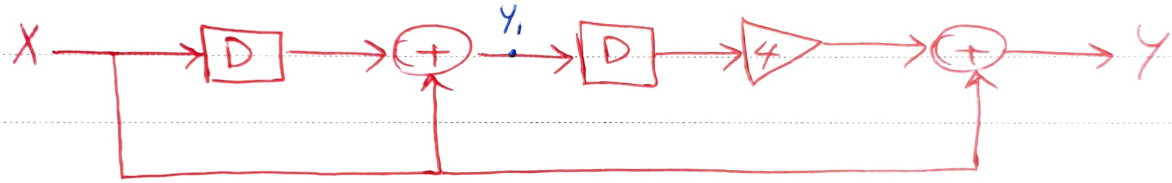
$$Y_2 = Y_1 + 2RY_1 \xrightarrow{\text{I}} Y_2 = (X+2RX) + 2R(X+2RX)$$

$$= X + 2RX + 2RX + 4R^2X$$

$$= X + 4RX + 4R^2X$$

$$= X(1+4R+4R^2)$$

✓



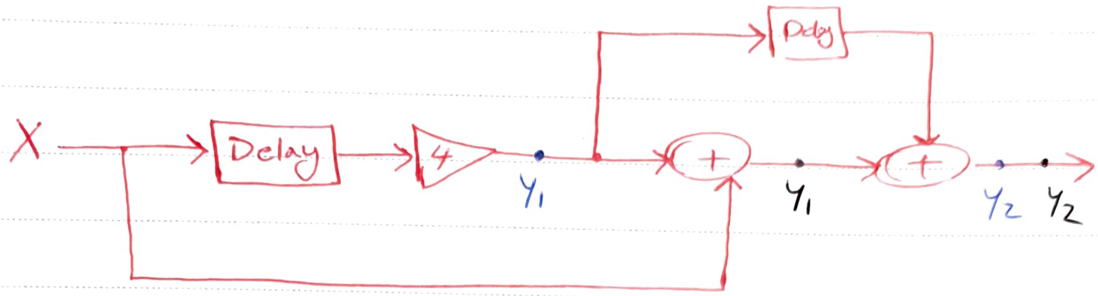
$$Y_1 = X + RX \quad \text{I}$$

$$Y_2 = X + 4RY_1 \xrightarrow{\text{I}} Y_2 = X + 4R(X+RX) = X + 4RX + 4R^2X$$

$$\rightarrow Y_2 = X + 4RX + 4R^2X = X(1+4R+4R^2)$$

✓

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$Y_1 = 4RX$ (I)

$Y_2 = RY_1 + Y_1 + X \xrightarrow{\text{I}} Y_2 = R(4RX) + 4RX + X$

$= 4R^2X + 4RX + X$

$= X(4R^2 + 4R + 1)$ ✓

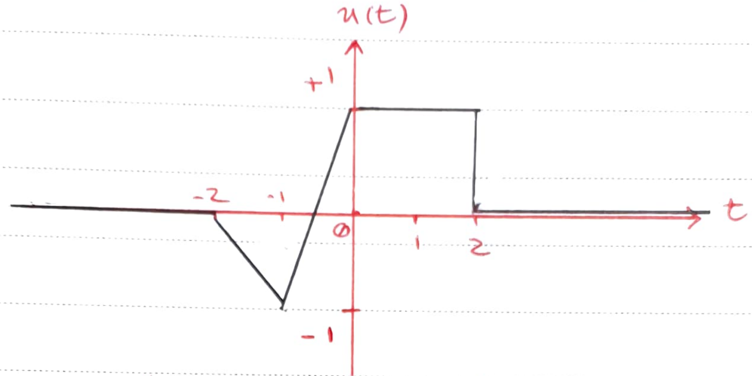
$Y_1 = 4RX + X$ (I)

$Y_2 = Y_1 + 4XR(R) = Y_1 + 4R^2X \xrightarrow{\text{I}} Y_2 = 4RX + X + 4R^2X$

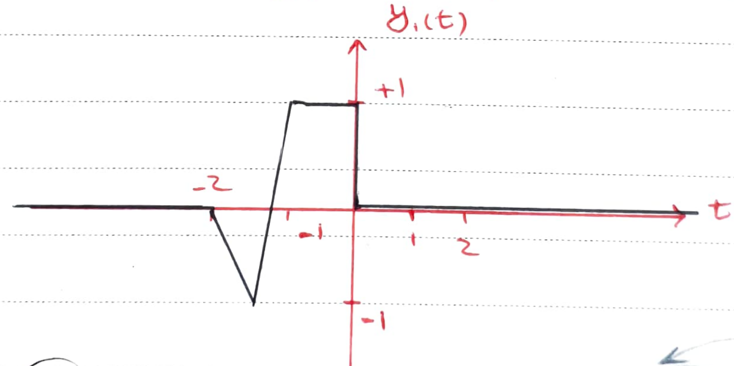
$= X(4R + 1 + 4R^2)$ ✓

جلسه ۸

تمرین: با فرض اینکه سیگنال $x(t)$ دارای شکل موج به صورت زیر باشد که در بازه‌ی ۲- تا ۲+ دارای مقدار می‌باشد به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) اگر سیگنال $y_1(t)$ که برگرفته از سیگنال x می‌باشد دارای شکل موجی به صورت زیر باشد رابطه‌ی عملکردی سیگنال $y_1(t)$ را بر اساس x بنویسید.



نکته) فشرده سازی یا باز شدن با ضریب نشان داده می‌شود. جابجایی در محور زمان با جمع نشان داده می‌شود.

$$y_1(t) = x(nt + m) \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} y_1(0) = x(2) \xrightarrow{\mathrm{I}} 0n + m = 2 \rightarrow m = 2 \\ y_1(-2) = x(-2) \xrightarrow{\mathrm{I}} -2n + m = -2 \rightarrow n = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1(t) = x(2t + 2)$$

همچنین می‌توانستیم از نقطه $y_1(-1) = x(0)$ هم استفاده کنیم.

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

الف) رابطه‌ی عملکردی x را براساس y_1 بدست آورید.

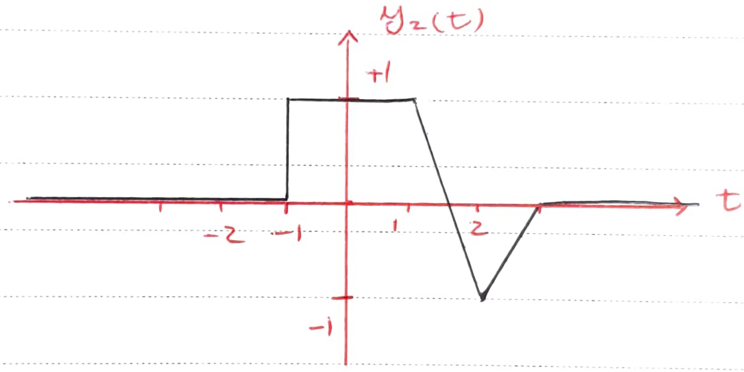
$$x(t) = y_1(nt+m)$$

$$\begin{cases} x(0) = y_1(-1) \rightarrow 0n+m=-1 \Rightarrow m=-1 \\ x(2) = y_1(0) \Rightarrow 2n+m=0 \Rightarrow 2n-1=0 \Rightarrow n=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow x(t) = y_1\left(\frac{1}{2}t-1\right)$$

* می‌توانستیم از نقطه‌ی $x(-2)=y_1(-2)$ هم استفاده کنیم.

ب) اگر سیگنال $y_2(t)$ دارای شکل موج صورت زیر باشد، رابطه‌ی عملکردی آن را براساس سیگنال x بدست آورید.



$$y_2(t) = x(nt+m)$$

$$\begin{cases} y_2(-1) = x(2) \rightarrow -n+m=2 \\ y_2(3) = x(-2) \Rightarrow 3n+m=-2 \end{cases}$$

$$n=-1,\ m=1$$

$$\Rightarrow y_2(t) = x(1-t)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ب) رابطه‌ی عملگری x را براساس سیگنال y_2 بدست آورید.

$$x(t) = y_2(nt+m)$$

$$\begin{cases} x(0) = y_2(1) \Rightarrow 0n+m=1 \rightarrow m=1 \\ x(-2) = y_2(3) \rightarrow -2n+m=3 \rightarrow -2n=2 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = y_2(1-t)$$

ج) در صورتی که رابطه‌ی عملگری سیگنال y_3 براساس x به صورت $y_3(t) = x(2t+3)$ باشد

تمامی مقادیر t را که در آن‌ها خروجی $y_3(t)$ برابر 1 است را بدست آورید.

$$0 < 2t+3 < 2$$

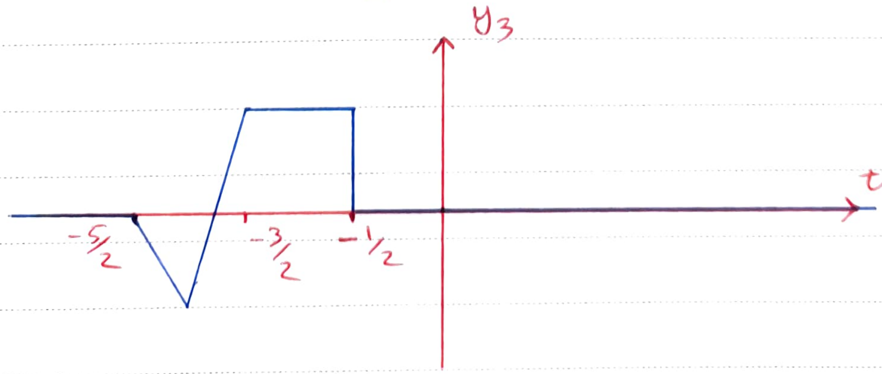
مقادیر سیگنال $x(t)$ در این محدوده برابر 1 است.

$$\Rightarrow -3 < 2t < -1$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{3}{2} < t < -\frac{1}{2}}$$

$$2t+3 = -2 \Rightarrow t = \frac{-5}{2}$$

$$2t+3 = 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

ج) با فرض اینکه سیگنال x قابل نوشتن بصورت حاصل جمع تابع زوج و تابع فرد x باشد تمامی t هایی که در آن‌ها $x_e(t)$ (همان مقدار تابع زوج) برابر با 0 است را بدست آورید.

هر وقت صحبت تابع زوج و فرد شد، در اولین قدم $(-t)$ را جایگذاری می‌کنیم.

ما باید دنبال نقاط t و $-t$ بگردیم که مقدار آن‌ها طوری باشد که حاصل رابطه‌ی (*) برابر 0 شود!!

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad \text{I}$$

$$\Rightarrow x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t)$$

$$\Rightarrow x(-t) = x_e(t) - x_o(t) \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow{\text{I},\text{II}} x(t) + x(-t) = 2x_e(t)$$

$$\Rightarrow x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t<-2,\ t>2 \Rightarrow x_e(t) = \dfrac{x(3)+x(-3)}{2} = \dfrac{3+0}{2} \dots 0 \\ t=1,\ t=-1 \Rightarrow x_e(t) = \dfrac{x(1)+x(-1)}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$$

د) محل‌هایی که $x_o(t)=0$ می‌شود را پیدا کنید.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad \text{I}$$

$$\Rightarrow x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t)$$

$$\Rightarrow x(-t) = x_e(t) - x_o(t)$$

$$\Rightarrow -x(-t) = -x_e(t) + x_o(t) \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow{\text{I},\text{II}} x(t) - x(-t) = 2x_o(t)$$

$$\Rightarrow x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

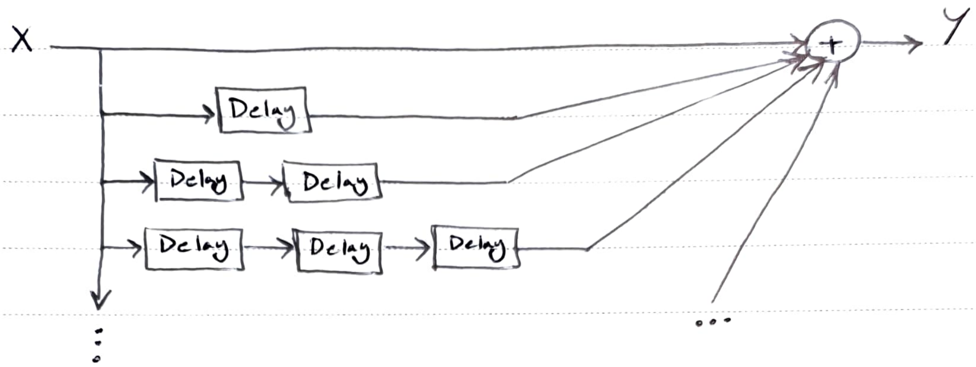
$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow x_o(t) = \dfrac{x(0)-x(0)}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 \\ t<-2,\ t>2 \Rightarrow x_o(t) = \dfrac{x(3)-x(-3)}{2} = \dfrac{0-0}{2} = 0 \end{cases}$$

Subject: هفته ۸ - ۲جلسه ای - جلسه اول
Year. ۹۸ Month. ۰۱ Date. ۲۷ ( )

سیستم انباره ای : در سیستم انباره ای ، خروجی فعلی به تمامی ورودی های ما قبل خود بستگی دارد. شکل زیر

(مربوط به Slide 39) نمودار دیاگرام مربوط به یک سیستم انباره ای (Accumulator) را نشان می دهد

که از روی این نمودار دیاگرام می توان رابطه ی عملکردی سیستم انباره ای را به شکلی که در ادامه می آید، نوشت :



$$Y = X + RX + R^2X + R^3X + \dots = (1 + R + R^2 + R^3 + \dots)X$$

سیستم بازخوردی یا فیدبک : در این سیستم ها مقدار خروجی فعلی علاوه بر ورودی فعلی به خروجی بلافاصله قبل از خودش نیز وابسته است. به همین منظور یک feedback از خروجی به سمت ورودی اعمال می گردد. همانند بلوک دیاگرام زیر :

که رابطه ی عملکردی این سیستم را می توان بصورت زیر نوشت :

$$Y = X + RY \rightarrow Y - RY = X \Rightarrow Y(1-R) = X \rightarrow Y = \frac{X}{1-R}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R} \rightarrow (1)(1)^n R^n$$

تغییرات سیگنال های خروجی نسبت به ورودی

X Y

Subject :

Year . Month . Date . ( )

اثبات هم ارزی عملکرد سیستم انباره‌ای و چرخه‌ای :

از آن جایی که رابطه‌ی عملکردی سیستم فیدبکی برابر $(1-R)Y_1 = X_1$ می‌باشد و رابطه‌ی عملکردی سیستم انباره‌ای برابر $Y_2=(1+R+R^2+R^3+\dots)X_2$ است با فرض یکسان بودن سیگنال‌های ورودی $(X_1=X_2)$

کافی است ثابت کنیم $Y_2 = Y_1$ می‌باشد. که این عمل به صورت زیر انجام می‌شود :

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= (1+R+R^2+R^3+\dots)X_2 \\
&= (1+R+R^2+R^3+\dots)X_1 \\
&= (1+R+R^2+R^3+\dots)(1-R)Y_1 \\
&= \big((1+R+R^2+R^3+\dots)-(R+R^2+R^3+\dots)\big)Y_1 \\
&= 1Y_1 \\
&= Y_1 \Rightarrow \boxed{Y_2 = Y_1}
\end{aligned}
$$

از اثبات این هم ارزی می‌توان به این نتیجه رسید که :

$$\frac{1}{1-R} = 1+R+R^2+R^3+R^4+\dots$$

که این اثبات را می‌توان از طریق انجام عمل تقسیم به شکل زیر نتیجه گرفت :

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-R \\ \cline{2-2}
\underline{1-R} & 1+R+R^2+R^3+\dots \\
R & \\
\underline{R-R^2} & \\
R^2 & \\
\underline{R^2-R^3} & \\
R^3 & \\
\underline{R^3-R^4} & \\
\dots &
\end{array}
$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین: کدام یک از سیستم های زیر چرخه‌ای هستند؟ رابطه‌ی عملکردی هر کدام از آن ها را بنویسید.

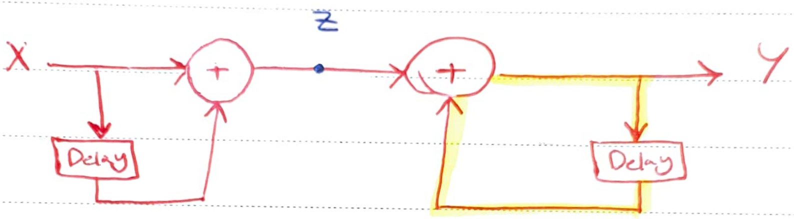
1 ✗

$$Z = X + RX$$

$$Y = RZ + RX = R(X + RX) + RX = X(2R + R^2)$$

چرخه‌ای نیست!

2 ✓



$$Z = X + RX$$

$$Y = Z + RY \Rightarrow Y - RY = Z \rightarrow Y(1-R) = X + RX = X(1+R)$$

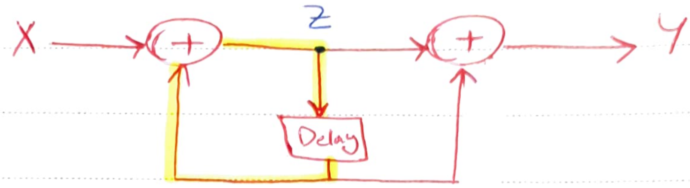
$$\Rightarrow Y(1-R) = X(1+R) \Rightarrow Y = \frac{X(1+R)}{1-R} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1+R}{1-R}$$

چرخه‌ای است!

Subject:

Year. Month. Date. ( )

③



$$Z = X + RZ \Rightarrow Z - RZ = X \Rightarrow Z = \frac{X}{1-R}$$

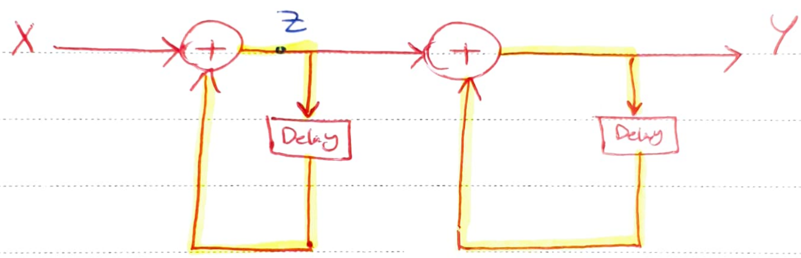
$$Y = Z + RZ = Z(1+R)$$

$$\rightarrow Y = \left(\frac{X}{1-R}\right)(1+R) \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1+R}{1-R} \rightarrow$$

معادل بلوک دیاگرام در رابطه‌ی عکس ② می‌باشد.

چرخه‌ای است.

④



$$Z = X + RZ \Rightarrow Z = \frac{X}{1-R}$$

$$Y = Z + RY \Rightarrow Y - RY = Z \Rightarrow Y(1-R) = Z = \frac{X}{1-R}$$

$$\Rightarrow Y(1-R) = \frac{X}{1-R} \Rightarrow Y(1-R)^2 = X \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{(1-R)^2}$$

چرخه‌ای است.

Subject: هفته‌ی ۸ - ۲ جلسه - جلسه سوم
Year. ۹۸ Month. ۰۱ Date. ۲۷ ( )

در صورتی که در مسیر فیدبک از خروجی به ورودی ضرب‌کننده قرار داشته باشد، مقدار سیگنال خروجی رابطه‌ی مستقیم با مقدار ضرب‌کننده خواهد داشت.

چنانچه مقدار ضرب‌کننده دارای عددی بزرگتر از ۱ باشد از آن جایی که مقدار سیگنال خروجی با هر ضرب در این ضرب‌کننده بزرگتر می‌گردد در این حالت می‌توان گفت که این سیستم واگرا می‌باشد. (مقادیر سیگنال رفته رفته از ۰ دور می‌شوند)

و در صورتی که مقدار این ضرب‌کننده عددی بین ۰ و ۱ باشد در این صورت از آن جایی که مقدار سیگنال خروجی با هر بار ضرب در این ضرب‌کننده، عدد کوچکتری خواهد شد، در این حالت سیستم همگرا می‌باشد. (مقادیر سیگنال رفته رفته به ۰ نزدیک می‌شوند)

همچنین اگر مقدار ضرب‌کننده منفی باشد، مقدار سیگنال (خروجی) بصورت یک در میان مثبت و منفی خواهد شد که اگر این عدد بین ۱- و ۰ باشد سیستم همگرا بوده و اگر کوچکتر از ۱- باشد واگرا خواهد بود.

تمرین: کدام یک از سیستم های زیر و صفحه‌ی بعد واگرا هستند؟

همگرا می‌باشد، واگرا نیست!

$$\Rightarrow Y = X + 0.5RY \Rightarrow Y - 0.5RY = X \Rightarrow Y(1-0.5R) = X \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-0.5R}$$

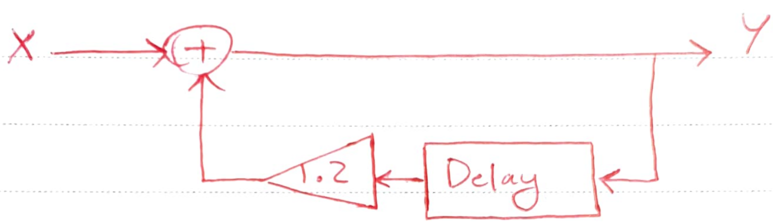
Subject :

Year . Month . Date . ( )

برا بدست آوردن ضرایب تقسیم انجام میدهیم :

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-0.5R \\ \hline 1-0.5R & 1+0.5R+0.25R^2+\cdots \\ \hline 0.5R & \\ 0.5R-0.25R^2 & \\ \hline 0.25R^2 & \\ \cdots & \end{array}$$

ضرایب $= 0.5,\ 0.25,\ 0.125, \ldots = (0.5)^n R^n$

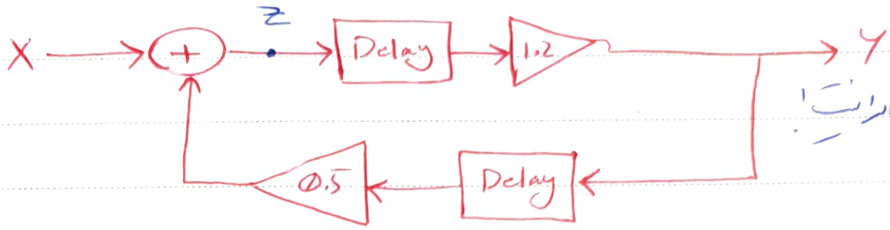


واگرا است!

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-1.2R}$$

ضرایب $= (1.2)^n R^n$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



همگرا است؛ نوسانی نیست!

$$Z = X + 0.5RY$$

$$Y = 1.2RZ = 1.2R(X + 0.5RY) = 1.2RX + 0.6R^2Y$$

$$\Rightarrow Y = 1.2RX + 0.6R^2Y \Rightarrow Y - 0.6R^2Y = 1.2RX$$

$$\Rightarrow Y(1-0.6R^2) = 1.2RX \Rightarrow \frac{Y(1-0.6R^2)}{X} = 1.2R$$

$$\Rightarrow Y/X = \frac{1.2R}{1-0.6R^2}$$

$$\begin{array}{l|l} 1.2R & 1-0.6R^2 \\ \hline \underline{1.2R-0.72R^3} & 1.2R+0.72R^3+0.432R^5+\dots \\ 0.72R^3 & \\ \underline{0.72R^3+0.432R^5} & \\ 0.432R^5 & \\ \dots & \end{array}$$

R^0 R^2 R^4 ⟶ ضرایب R به توان زوج موجود نیست؛ بشه $= 0$

روش اول : ضرایب $= (0, 1.2R, 0, 0.72, 0, 0.432, 0, --)$

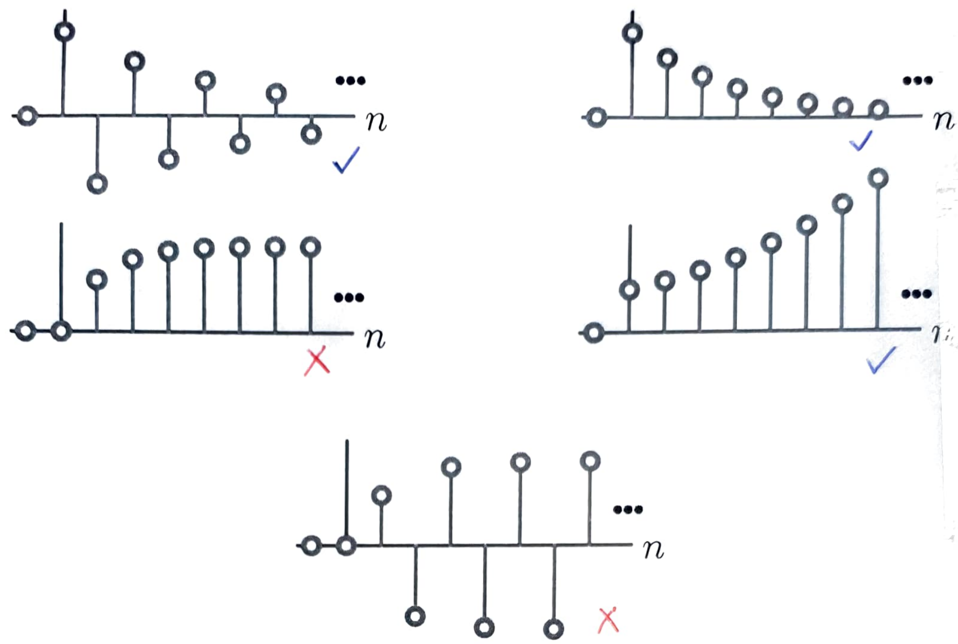
روش دوم :

$$\text{ضرایب} = \begin{cases} (1.2)(0.6)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ یا } (1.2)(0.6)^{\frac{n-1}{2}} & \text{؛ اگر n فرد باشد} \\ 0 & \text{؛ اگر n زوج باشد} \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین: کدام یک از سیگنال‌های زیر را می‌توان با استفاده از یک Pole (ضرب کننده) در سیستم فیدبک ایجاد نمود؟



10

✓ چون نسبت تغییرات برای n های متوالی به یک اندازه و مشابه می‌باشد بنابراین می‌توان آن‌ها را توسط یک ضرب کننده در خروجی ایجاد کنیم.

✗ چون مقدار اولیه شان 0 است و 0 که در هر چه ضرب شود حاصل 0 می‌شود!

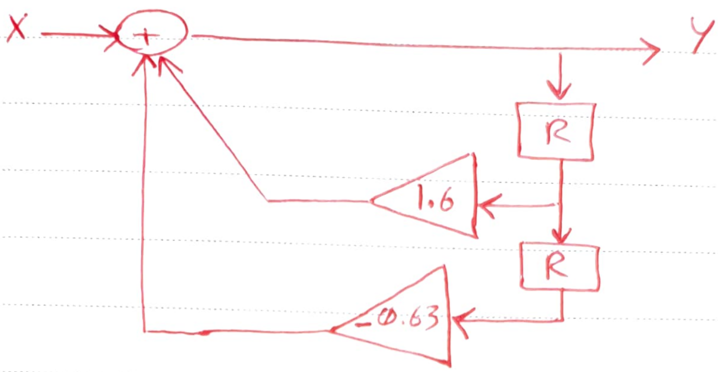
اگر مقدار اولیه 0 باشد، مقدار سیگنال خروجی که ضرب کند با هر مقداری هم که ضرب شود، مقدار 0 حاصل می‌شود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

«خودم»

یک مثال از تبدیل یک سیستم مرتبه دوم به ۲ سیستم ساده‌تر :



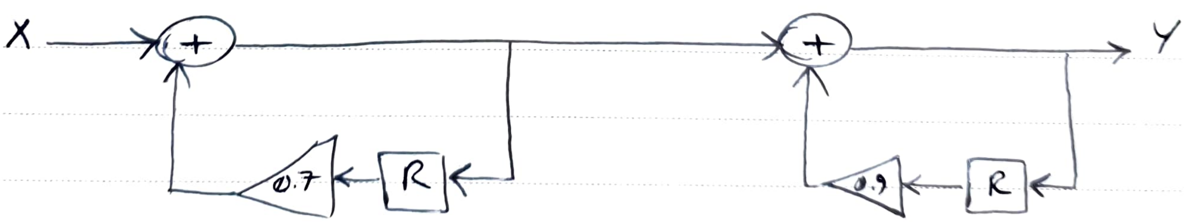
$$Y = X + 1.6RY - 0.63R^2Y$$

$$\Rightarrow Y - 1.6RY + 0.63R^2Y = X \Rightarrow Y(1 - 1.6R + 0.63R^2) = X$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1 - 1.6R + 0.63R^2} = \frac{1}{(1-0.7R)(1-0.9R)}$$

ضرب نشان دهنده سری بودن می شه

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{(1-0.7R)} \times \frac{1}{(1-0.9R)}$$



Subject: هفته ۹ - تک جلسه
Year. ۹۸ Month. ۰۲ Date. ۰۳

مثال) برای سیستم با تابع عملکردی زیر، ضریب جمله‌ی دوم و ۱۱۹ را بدست آورید.

$$H_1(R) = \frac{R}{1-\frac{3}{4}R}$$

روش اول:

$$\begin{array}{l|l} R & 1-\frac{3}{4}R \\ \hline R-\frac{3}{4}R^2 & R+\frac{3}{4}R^2+\frac{9}{16}R^3 \\ \hline \frac{3}{4}R^2 & \\ \frac{3}{4}R^2-\frac{9}{16}R^3 & \\ \hline \frac{9}{16}R^3 & \\ \frac{9}{16}R^3+\frac{27}{64}R^4 & \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{\text{ضریب:}\ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}R^n} \Rightarrow$$

جمله دوم: $\frac{3}{4}$

جمله ۱۱۹: $\left(\frac{3}{4}\right)^{118}$

روش دوم: با توجه به اصل هم ارزی سیستم فیدبک واحد داریم:

$$\frac{R}{1-\frac{3}{4}R} = (R)\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}R}\right) = (R)\left(1+\frac{3}{4}R+\left(\frac{3}{4}\right)^2R^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3R^3+\dots\right) = R+\frac{3}{4}R^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2R^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3R^4+\dots = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}R^n$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

سوال) برای سیستم با تابع عملکرد زیر ضریب جمله‌ی دوم و ۱۱۹ را بدست آورید:

$$H_2(R) = \frac{1 - \frac{1}{16}R^4}{1 - \frac{1}{2}R} = \left(1 - \frac{1}{16}R^4\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}R}\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 R^4$$

$$= \left(1 - \frac{1}{16}R^4\right)\left(1 + \frac{1}{2}R + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 R^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 R^3 + \dots\right)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}R + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 R^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 R^3 + \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 R^4} + \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 R^5} + \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 R^6} + \dots\right]$$

$$- \left[\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 R^4} + \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 R^5} + \cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 R^6} + \dots\right]$$

$$\rightarrow h(2) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

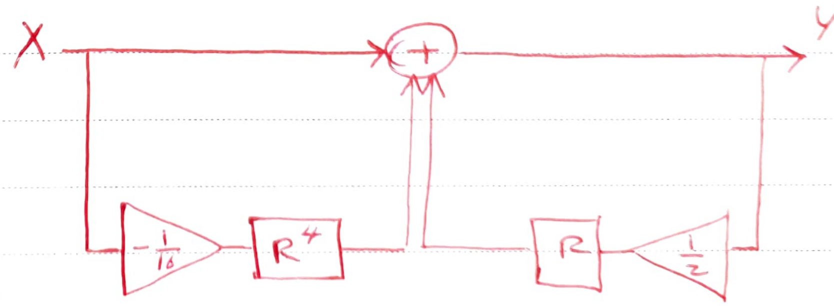
$$\rightarrow h(119) = 0$$

✓ همچنین بلوک دیاگرام این سیستم را می‌توان به شکل زیر رسم نمود:

$$Y/X = \frac{1 - \frac{1}{16}R^4}{1 - \frac{1}{2}R}$$

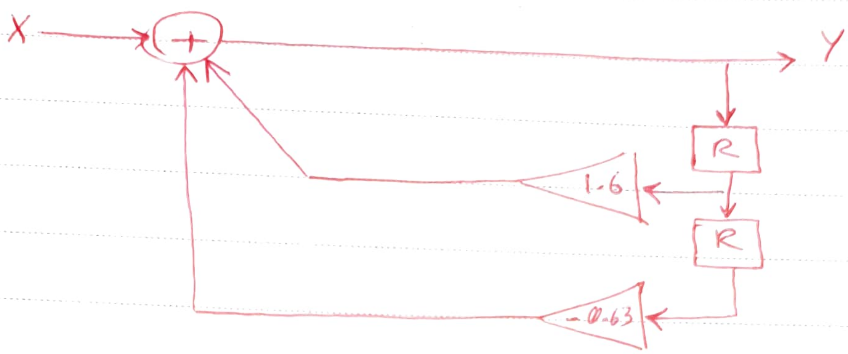
$$Y - \frac{1}{2}RY = X - \frac{1}{16}R^4 X$$

$$Y = X - \frac{1}{16}R^4 X + \frac{1}{2}RY$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای سیستم با بلوک دیاگرام زیر، انواع تحقق نمایش عملگری را بدست آورید:



رابطه‌ی عملگری این سیستم بصورت زیر قابل نوشتن است:

$$Y = X + 1.6\,RY - 0.63R^2Y$$

$$\Rightarrow Y - 1.6RY + 0.63R^2Y = X$$

$$\Rightarrow Y(1 - 1.6R + 0.63R^2) = X$$

$$\Rightarrow (1-0.7R)(1-0.9R)Y = X$$

بنابراین می‌توان نوشت:

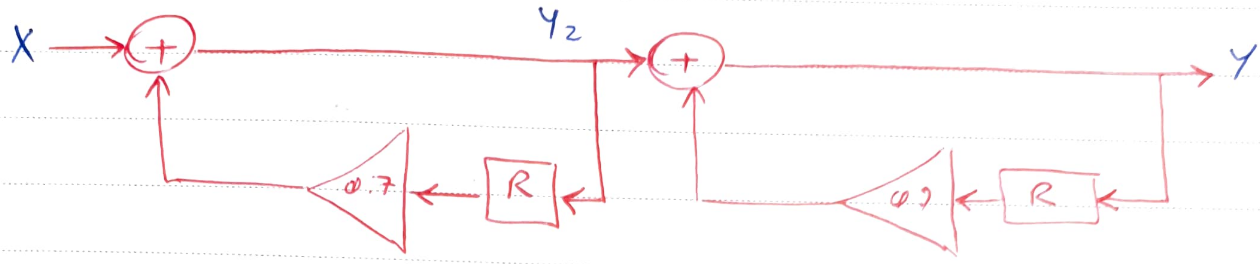
$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1-0.7R)(1-0.9R)} = \frac{1}{(1-0.7R)} \times \frac{1}{(1-0.9R)}$$

همانطور که قبلاً نیز دیده بودیم در صورت داشتن چنین رابطه‌ی عملگری برای Y/X می‌توان این سیستم را در قالب ۲ زیرسیستم که به صورت سری به یکدیگر وصل شده‌اند (هر ۲ فیدبکی هستند) بطوریکه مقدار ضرب کننده‌ی یکی از این زیرسیستم‌ها در مسیر فیدبک برابر 0.7 بوده و مقدار ضرب کننده‌ی زیرسیستم دوم در مسیر فیدبک برابر 0.9 می‌باشد. از این رو می‌توان این سیستم را مطابق با صفحه‌ی بعد آمده نمایش داد:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$(1-0.7R)(1-0.9R)Y = X$$



$$(1-0.7R)Y_2 = X \qquad (1-0.9R)Y = Y_2$$

همچنین با توجه به اینکه عملکرد سیستم فیزیکی و ابزارهای هم از یکدیگر هستند بنابراین می‌توان رابطه‌ی عملکردی را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1-0.7R)} \times \frac{1}{(1-0.9R)}$$

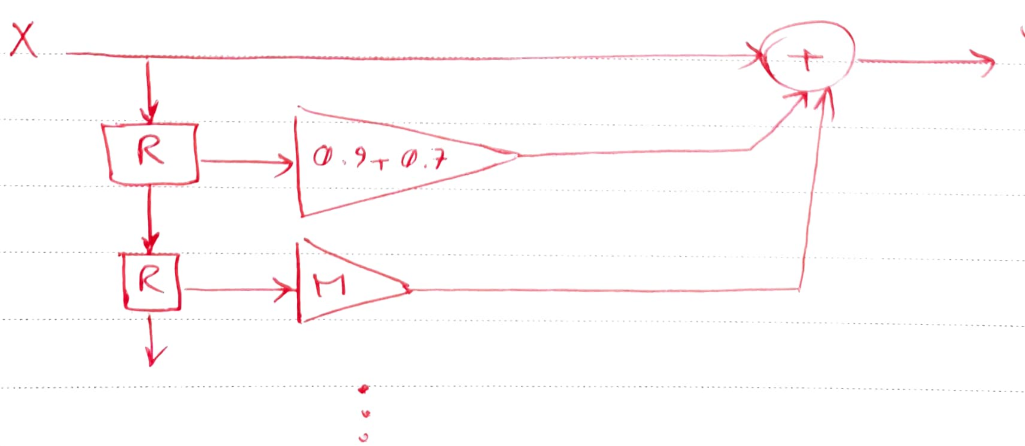
$$= (1)\left(\frac{1}{1-0.7R}\right) \times (1)\left(\frac{1}{1-0.9R}\right)$$

$$= \left(1+0.7R+(0.7)^2R^2+\dots\right) \times \left(1+0.9R+(0.9)^2R^2+\dots\right)$$

$$= 1+(0.9+0.7)R+(\underbrace{0.9^2+0.7\times0.9+0.7^2}_{M})R^2$$

$$+(0.7^3+0.9^3+0.7^2\times0.9+0.7\times0.9^2)R^3+\dots$$

از روی این رابطه‌ی عملکردی می‌توان عملکرد این سیستم را به صورت زیر نمایش داد:



Subject: هفته ۱۰ - ۲ جلسه - جلسه اول
Year. ۹۸ Month. ۰۲ Date. ۱۰ ( )

- ادامه ی پاسخ سئوال قبلی :

در صورت تفکیک جمع این که می توان رابطه ی عملگری سیستم را بصورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{(1-0.9R)(1-0.7R)} = \frac{A}{(1-0.9R)} + \frac{B}{(1-0.7R)} = \frac{A(1-0.7R)+B(1-0.9R)}{(1-0.9R)(1-0.7R)}$$

$$\Rightarrow A(1-0.7R)+B(1-0.9R)=1$$

$$\Rightarrow A-0.7AR+B-0.9BR=1+0R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \quad (\mathrm{I}) \\ 0.7A+0.9B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.7A-0.7B=-0.7 \\ 0.7A+0.9B=0 \end{cases}$$

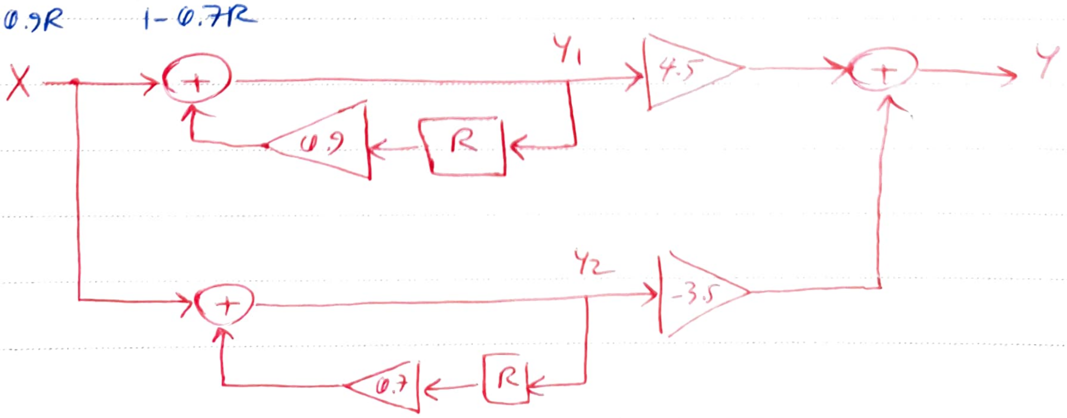
$$0.2B=-0.7 \Rightarrow B=-3.5$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}} A-3.5=1 \Rightarrow A=4.5$$

$$\Rightarrow \frac{4.5}{1-0.9R} - \frac{3.5}{1-0.7R} \Rightarrow 4.5\times(0.9)^n - 3.5\times(0.7)^n$$

براساس رابطه ی بدست آمده می توان بلوک دیاگرام این سیستم را بصورت زیر طراحی نمود :

$$Y/X = \frac{4.5}{1-0.9R} - \frac{3.5}{1-0.7R}$$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

- نمونه سؤال امتحانی: آیا عملکرد ۲ سیستم CH03 (Slide 22) شبیه به یکدیگر است؟

سؤال) سیستم با رابطه‌ی عملکردی زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = -\frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] + x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

✓ الف) همگرا به صفر است یا صفر.

× ب) ۲ Pole داریم و آن‌ها عبارتند از $z=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{2}$

× ج) ۱ Pole داریم و آن $z=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

✓ د) ۲ Pole داریم.

× هـ) هیچ‌کدام

* چون $[n-2]$ یا R^2 داریم، به همین دلیل قطعاً ۲ Pole داریم.

$$\Rightarrow Y = -\frac{1}{4}RY + \frac{1}{8}R^2Y + RX - \frac{1}{2}R^2X$$

$$\Rightarrow Y + \frac{1}{4}RY - \frac{1}{8}R^2Y = X\left(R - \frac{1}{2}R^2\right)$$

$$\Rightarrow Y\left(1 + \frac{1}{4}R - \frac{1}{8}R^2\right) = X\left(R - \frac{1}{2}R^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{R - \frac{1}{2}R^2}{1 + \frac{1}{4}R - \frac{1}{8}R^2}$$

✓ برای پیدا کردن Pole ها، به جای R، $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم و سپس $\boxed{\text{ریشه‌های مخرج}}$ را بدست می‌آوریم:

Subject:

Year.　　Month.　　Date.　　(　)

$$R=\frac{1}{z} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}}{1+\frac{1}{4}\frac{1}{z}-\frac{1}{8}\frac{1}{z^2}} = \frac{\frac{z-\frac{1}{2}}{\cancel{z^2}}}{\frac{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}{\cancel{z^2}}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}$$

سپس ریشه‌های مخرج را بدست می‌آوریم:

$$z^2+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\frac{1}{4}\right)^2-4(1)\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{9}{16}$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} -\ z_1=-\frac{1}{2} \\ -\ z_2=+\frac{1}{4} \end{cases}$$

پس ۲ Pole داریم و گزینه‌ی د صحیح است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که گزینه‌های ب - ج و هم غلط

می‌باشند. برای راستی آزمایی گزینه‌ی الف چنین عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} R-\frac{1}{2}R^2 & 1+\frac{1}{4}R-\frac{1}{8}R^2 \\ \hline \underline{R+\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{8}R^3} & \underbrace{R-\frac{3}{4}R^2-\frac{1}{16}R^3\ \cdots} \\ -\frac{3}{4}R^2+\frac{1}{8}R^3 & \\ \underline{-\frac{3}{4}R^2-\frac{3}{16}R^3+\frac{3}{32}R^4} & \\ -\frac{1}{16}R^3-\frac{3}{32}R^4 & \\ \underline{-\frac{1}{16}R^3-\frac{1}{64}R^4+\frac{1}{128}R^5} & \\ -\frac{5}{64}R^4-\frac{1}{128}R^5 & \\ \vdots & \end{array}$$

چون مقدار خارج قسمت رفته رفته به 0 نزدیک می‌شود، به همین دلیل این سیستم همگرا به صفر می‌باشد.

گزینه الف صحیح است.

Subject: هفته ۱۰ - جلسه ۲ - جلسه دوم
Year .۹۸ Month .۰۲ Date .۱۰ ( )

- Pole های سیستم فیبوناچی را پیدا کنید.

مقدار اولیه

۲ خروجی قبلی

رابطه بازگشتی فیبوناچی $\Rightarrow$ $Y = X + RY + R^2Y$

$$Y - RY - R^2Y = X \Rightarrow Y(1 - R - R^2) = X$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R-R^2} \xrightarrow{R=\frac{1}{Z}} \frac{1}{1-\frac{1}{Z}-\frac{1}{Z^2}} = \frac{1}{\frac{Z^2-Z-1}{Z^2}}$$

$$= \frac{Z^2}{Z^2-Z-1}$$

سپس ریشه های مخرج را بدست می آوریم:

$$Z^2 - Z - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 1.618 \\ Z_2 = 0.618 \end{cases}$$

۲ Pole داریم و چون این ۲ Pole دارای چنین رابطه‌ای هستند: $Z_1 = \frac{1}{Z_2}$, $Z_2 = \frac{1}{Z_1}$

به همین دلیل این ۲ Pole نسبت به هم "نسبت طلایی" یا golden Ratio دارند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R-R^2} = \frac{1}{(1-1.618R)(1+0.618R)}$$

$$= \frac{A}{(1-1.618R)} + \frac{B}{(1+0.618R)}$$

$$\rightarrow A(1+0.618R) + B(1-1.618R) = 1$$

$$\Rightarrow A + 0.618AR + B - 1.618BR = 1 + 0R$$

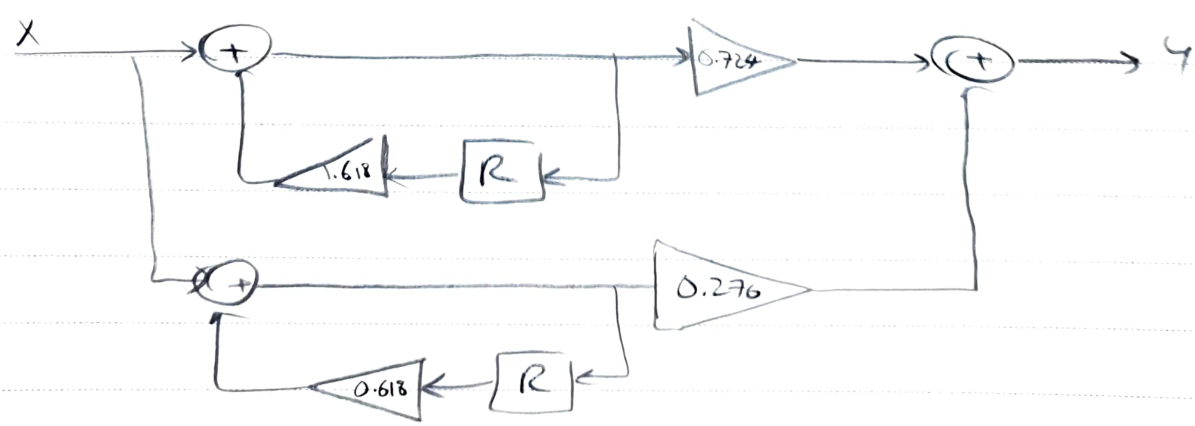
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 0.618A - 1.618B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{0.618}A - 0.618B = -0.618 \\ \cancel{0.618}A - 1.618B = 0 \end{cases}$$

$$-2.236B = -0.618 \Rightarrow B = 0.276$$

$$A = 0.724$$

$$\Rightarrow \frac{0.724}{1-1.618R} + \frac{0.276}{1+0.618R} \Rightarrow (0.724)(1.618)^n + (0.276)(-0.618)^n$$



Subject :
Year . Month . Date . ( )

سؤال) برای سیستم با تابع عملکردی زیر، ضریب جمله‌ی دوم و 119 را بدست آورید.

$$H_3(R) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}R)(1-\frac{1}{4}R)} = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}R)} + \frac{B}{(1-\frac{1}{4}R)}$$

$$\Rightarrow A(1-\tfrac{1}{4}R) + B(1-\tfrac{1}{2}R) = 1$$

$$\Rightarrow A - \frac{1}{4}AR + B - \frac{1}{2}BR = 1 + 0R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B = +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}B - \frac{1}{2}B = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}B = \frac{1}{4} \Rightarrow B = -1$$

$$A + B = 1 \Rightarrow A - 1 = 1 \Rightarrow A = 2$$

$$\rightarrow \frac{2}{(1-\frac{1}{2}R)} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4}R)} = \frac{2}{(1-0.5R)} - \frac{1}{(1-0.25R)}$$

$$\Rightarrow (2)(0.5)^n - (1)(0.25)^n = (2)(0.5)^n - (0.25)^n$$

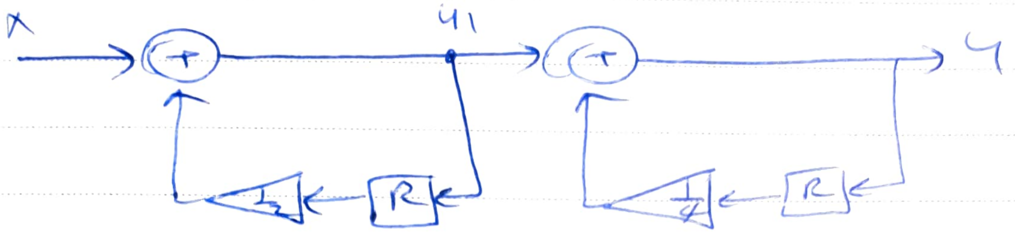
$$h(2) = (2)(0.5)^2 - (1)(0.25)^2 = 0.5 - 0.0625 = 0.4375$$

$$h(119) = (2)(0.5)^{119} - (1)(0.25)^{119} = 0$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$H_3(R) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}R)(1-\frac{1}{4}R)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}R} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}R}$$



$$y_1 = x + \frac{1}{2}Ry_1 \Rightarrow y_1(1-\frac{1}{2}) = x \Rightarrow y_1 = \frac{x}{1-\frac{1}{2}R}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{4}Ry \Rightarrow y_1 = y(1-\frac{1}{4}R)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-\frac{1}{2}R} = y(1-\frac{1}{4}R)$$

$$\Rightarrow x = y(1-\frac{1}{4}R)(1-\frac{1}{2}R)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}R)(1-\frac{1}{2}R)}$$

Subject: هفته ۱۱ - یک جلسه

Year. ۹۸ Month. ۰۲ Date. ۱۷ ( )

برای سیستم با تابع عکس‌العمل زیر، ضریب عددی دوم و ۱۱۹ را بدست آورید:

$$H_4(R) = \frac{1}{(1-R)^2}$$

$$\frac{1}{(1-R)^2} = \frac{1}{1-R} \times \frac{1}{1-R} = (1+R+R^2+\dots)(1+R+R^2+\dots)$$

$1R^0$

$$= 1 + 2R + 3R^2 + 4R^3 + \dots$$

عدد صفرم

$h(2) = 3$

$h(119) = 120$

مرتب $(n+1)R^n \xrightarrow{n=2} 3R^2$

$\xrightarrow{n=119} 120R^{119}$

Subject: هفته ۱۲ - ۲جلسه - جلسه اول

Year. ۹۸ Month. ۰۲ Date. ۲۴ ( )

«جلسه دوم تشکیل نشد»

درستی رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R-R^2} = \frac{\frac{\phi}{\sqrt{5}}}{1-\phi R} + \frac{\frac{1}{\phi\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\phi}R}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R-R^2} = \frac{1}{(1-\phi R)(1+\frac{1}{\phi}R)} = \frac{A}{1-\phi R} + \frac{B}{1+\frac{1}{\phi}R}$$

$$\Rightarrow A\left(1+\frac{1}{\phi}R\right) + B(1-\phi R) = 1$$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{\phi}RA + B - \phi BR = 1 + 0R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{1}{\phi}A - \phi B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi A + \cancel{\phi B} = \phi \\ \frac{1}{\phi}A - \cancel{\phi B} = 0 \end{cases} \quad \text{I}$$

$$\phi A + \frac{1}{\phi}A = \phi \Rightarrow A\left(\phi + \frac{1}{\phi}\right) = \phi$$

$$\Rightarrow A = \frac{\phi}{\phi + \frac{1}{\phi}} \quad \text{II} \quad (*)$$

$$(*) \quad \phi + \frac{1}{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^2 + 4}{2(1+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5+4}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{10+2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{2(5+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} \frac{\times(1-\sqrt{5})}{\times(1-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{5-5\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{1-5} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5} \quad \text{II} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\phi}{\sqrt{5}}}$$

$$\text{I} \Rightarrow \frac{1}{\phi} \times \frac{\phi}{\sqrt{5}} - \phi B = 0 \Rightarrow \phi B = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{\phi\sqrt{5}}}$$

Subject:

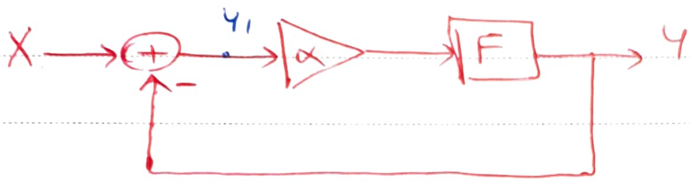
Year. Month. Date. ( )

سوال) در سیستم زیر F یک تابع سیستمی متشکل از جمع کننده، تأخیر و ضرب کننده ها است. در صورتی که

$\alpha=10$ باشد تابع عملکردی سیستم بدین صورت $\left.\frac{Y}{X}\right|_{\alpha=10}=\frac{1+R}{2+R}$ می باشد.

الف) تابع عملکردی سیستم را برای موقعی که $\alpha=20$ است، بدست آورید.

ب) تابع عملکردی این سیستم را با در نظر گرفتن $\alpha=10$، در حالیکه در خروجی زیرسیستم F یک المان تأخیری اضافه گردد بدست آورید.



الف)

$$Y_1 = X - Y$$

$$Y = \alpha F Y_1 = \alpha F (X - Y) \Rightarrow Y = \alpha F X - \alpha F Y \Rightarrow Y + \alpha F Y = \alpha F X$$

$$\Rightarrow Y(1+\alpha F) = \alpha F X \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{\alpha F}{1+\alpha F} \; \mathrm{I} \xRightarrow{\alpha=10} \frac{Y}{X} = \frac{10F}{1+10F}$$

$$\Rightarrow \frac{10F}{1+10F} = \frac{1+R}{2+R} \Rightarrow 20F + 10FR = 1+R+10F+10FR$$

$$\Rightarrow 20F - 10F = 1+R \Rightarrow F = \frac{1+R}{10} \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} \xRightarrow[\alpha=20]{} \frac{Y}{X} = \frac{20F}{1+20F} = \frac{20\left(\frac{1+R}{10}\right)}{1+20\left(\frac{1+R}{10}\right)} = \frac{2+2R}{3+2R}$$

ب)

$$\mathrm{II} \Rightarrow F' = \left(\frac{1+R}{10}\right)R = \frac{R+R^2}{10}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{10F'}{1+10F'} = \frac{10\left(\frac{R+R^2}{10}\right)}{1+10\left(\frac{R+R^2}{10}\right)} = \frac{R+R^2}{1+R+R^2}$$

Subject: هفته ۱۳ - یک جلسه
Year. ۹۸ Month. ۰۲ Date. ۲۱

Pole های موهومی (ضریب ها موهومی)

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1-R+R^2}$$

برای پیدا کردن Pole ها $\Rightarrow R = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{\frac{z^2-z+1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2-z+1}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1-4 = -3 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \qquad \sqrt{-1}\sqrt{3} = \sqrt{3}j$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(I)}$$

داریم:

$$e^{\pm j\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{\text{قسمت حقیقی}} \pm \underbrace{j\sin\theta}_{\text{قسمت موهومی}}$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm j\sin\frac{\pi}{3} = e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$$

پس Pole های این سیستم عبارتند از: $e^{j\frac{\pi}{3}}$, $e^{-j\frac{\pi}{3}}$

بعد از بدست آوردن ریشه ها اقدام به تفکیک کسر می کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{A}{1-e^{j\frac{\pi}{3}}R} + \frac{B}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}}R} \quad \text{(A)}$$

* ثابت می شود که ضرب ریشه ها موهومی در هم برابر 1 است:

$$e^{+j\frac{\pi}{3}} \times e^{-j\frac{\pi}{3}} = \left[\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right] \times \left[\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{3} - j\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + j\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + 1\sin^2\frac{\pi}{3} = 1$$

$$-j^2 = -(\sqrt{-1})^2 = -(-1) = 1$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* همچنین جمع ریشه‌های موهومی هم برابر ۱ است، بدین ترتیب ثابت می‌شود:

$$e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{\pi}{3}} = \left[\cos\frac{\pi}{3} + \cancel{j\sin\frac{\pi}{3}}\right] + \left[\cos\frac{\pi}{3} - \cancel{j\sin\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

در ادامه از (A) داریم:

$$\text{(A)} \Rightarrow A\left(1-e^{-j\frac{\pi}{3}}R\right) + B\left(1-e^{j\frac{\pi}{3}}R\right) = 1 + 0R$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ e^{-j\frac{\pi}{3}}A + e^{j\frac{\pi}{3}}B = 0 \quad \text{(B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -e^{-j\frac{\pi}{3}}A - e^{-j\frac{\pi}{3}}B = -e^{j\frac{\pi}{3}} \\ e^{-j\frac{\pi}{3}}A + e^{j\frac{\pi}{3}}B = 0 \end{cases}$$

$$-e^{-j\frac{\pi}{3}}B + e^{j\frac{\pi}{3}}B = -e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{-e^{-j\frac{\pi}{3}}}{-e^{-j\frac{\pi}{3}} + e^{j\frac{\pi}{3}}}$$

تبدیل

$$2j\sin\frac{\pi}{3} = 2j\frac{\sqrt{3}}{2} = j\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{j\sqrt{3}}$$

ثابت شد که ضرب ریشه‌های موهومی در هم برابر ۱ است.

$$\text{(B)} \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{3}}A + e^{j\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-e^{-j\frac{\pi}{3}}}{j\sqrt{3}}\right) = e^{-j\frac{\pi}{3}}A + \left(\frac{-1}{j\sqrt{3}}\right)$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{3}}A - \frac{1}{j\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{3}}A = \frac{1}{j\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{j\sqrt{3}\,e^{-j\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{j\sqrt{3}}$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

(A) $$\frac{Y}{X} = \frac{1}{j\sqrt{3}}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{1-e^{j\frac{\pi}{3}}R} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}}R}\right)$$

$$= \frac{1}{j\sqrt{3}}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n - e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot\left(e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{j\sqrt{3}}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\left(e^{jn\frac{\pi}{3}}\right) - e^{-j\frac{\pi}{3}}\left(e^{-jn\frac{\pi}{3}}\right)\right)$$

Hint: $2^3 \times 2 = 2^4 = 2^{3+1}$

$$= \frac{1}{j\sqrt{3}}\left(\underbrace{e^{j(n+1)\frac{\pi}{3}} - e^{-j(n+1)\frac{\pi}{3}}}\right)$$

شبیه به فرمول ۲ برابر سینوس است.

$$= \frac{1}{j\sqrt{3}}\left(2j\sin(n+1)\frac{\pi}{3}\right)$$

حال عملکرد این سیستم با رابطه‌ی عملگری ذکر شده براساس n عبارت است از:

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n+1)\frac{\pi}{3}$$

$1, 1, 0, -1, -1, 0, \dots$

$n=0$ عضو اول

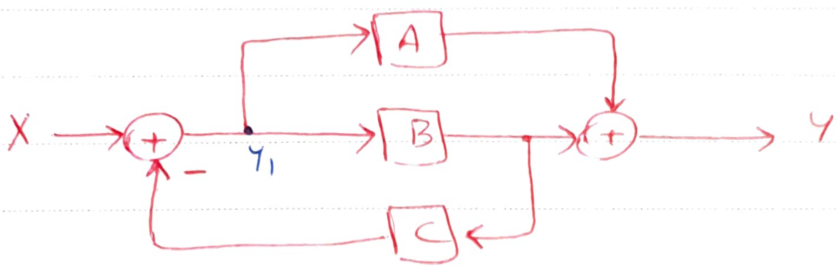
$n=1$ عضو دوم

Subject: هفته ۱۴ - ۲ جلسه - جلسه اول

Year. ۹۸ Month. ۰۳ Date. ۰۷ ( )

نمونه سؤال

- رابطه‌ی عملکردی سیستم زیر را پیدا کنید:



$$Y_1 = X + Y_1BC(-1) = X - Y_1BC$$

$$Y_1 + Y_1BC = X \Rightarrow X = Y_1(1+BC) \Rightarrow Y_1 = \frac{X}{1+BC} \quad \text{I}$$

$$Y = AY_1 + Y_1B = Y_1(A+B) \Rightarrow Y = Y_1(A+B)$$

$$\overset{\text{I}}{\Longrightarrow} Y = \frac{X}{1+BC}(A+B) \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{A+B}{1+BC}$$

Subject :
Year .   Month .   Date .   ( )

سیستم زیر را در نظر بگیرید، پاسخ ضربه واحد این سیستم را بدست آورده و نشان دهید این سیستم Periodic است؟

$y[n]=y[n-1]-y[n-2]+x[n]$ ← سیستم فیدبکی

$y=Ry-R^2y+x$

$\rightarrow y-Ry+R^2y=x$

$\rightarrow y(1-R+R^2)=x \quad \rightarrow \quad \dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{1-R+R^2}$

برای بدست آوردن ضربه واحد می‌توان تفکیک کرد یا تقسیم کرد:

اگر برحسب اندیس n می‌خواست باید تفکیک می‌کردیم.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{1} & 1-R+R^2 \\ \hline \cancel{1}-R+R^2 & 1+R-R^3+R^4 \;\; -- \\ \hline \cancel{R}-\cancel{R^2} & \\ \cancel{R}-\cancel{R^2}+R^3 & \\ \hline -\cancel{R^3} & \\ -\cancel{R^3}+R^4-R^5 & \\ \hline -\cancel{R^4}+\cancel{R^5} & \\ -\cancel{R^4}+\cancel{R^5}-R^6 & \\ \hline R^6 & \\ 1 & \end{array}$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

$\rightarrow 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, --$

بعد از ۶ دوره تکرار می‌شود

$$\frac{Y}{X} = \underbrace{1 + R}_{1} - \underbrace{R^3 - R^4}_{R^3} + \underbrace{R^6 + R^7}_{R^6} - \underbrace{R^9 - R^{10}}_{R^9} + \cdots$$

$$= (1+R)\left(1 - R^3 + R^6 - R^9 + R^{12} - \cdots\right)$$

یادآوری:

$$\frac{1}{1-R} = \left(1 + R + R^2 + R^3 + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{1-R^2} = \left(1 + R^2 + R^4 + R^6 + \cdots\right)$$

$$= (1+R)(1-R^3)\left(1 + R^6 + R^{12} + R^{18} + \cdots\right)$$

$$= \frac{(1+R)(1-R^3)}{1-R^6} \Rightarrow$$

پس پریودیک است.

$$= (1+R)(1-R^3)\left(\frac{1}{1-R^6}\right)$$

چون ضرایب ۶ دسته تکرار می‌شود.

$$= (1 + R - R^3 - R^4)\left(1 + R^6 + R^{12} + R^{18} + \cdots\right)$$

ب) Pole ها را پیدا کنید.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ثابت کنید که سیستم زیر سری است:

$$h[n] = \begin{cases} n+1 & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (n+1)R^n$$

$n=0 \qquad n=1 \qquad n=2 \qquad n=3$

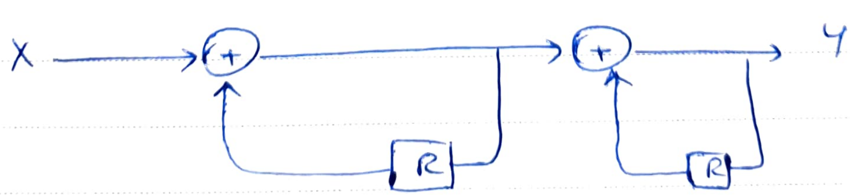
$(0+1)R^0, \quad (1+1)R^1, \quad (2+1)R^2, \quad (3+1)R^3, \quad \text{---}$

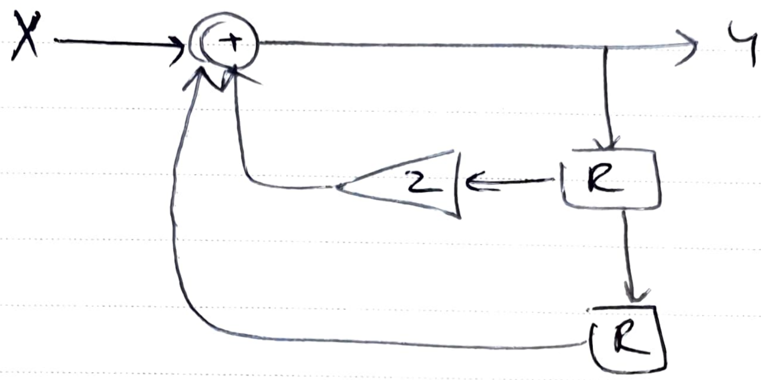
$$1 + 2R + 3R^2 + 4R^3 + \cdots$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+2R+3R^2+4R^3+\cdots \\ \hline 1+2R+3R^2+\cdots & 1-2R+R^2 \\ \hline -2R-3R^2-4R^3-\cdots & \\ -2R-4R^2-6R^3-8R^4-\cdots & \\ \hline R^2+2R^3+3R^4+\cdots & \\ R^2+2R^3+3R^4+\cdots & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-2R+R^2} = \frac{1}{1-R} \times \frac{1}{1-R}$$

چون توانستیم $\boxed{\text{تفکیک ضربی}}$ بکنیم، پس سری است.




X
+
y
2
R
R